



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 04116

1º semestre de 2013

Prof. Jürgen Stilck

Solução do exercício 3-6

a) Temos:

$$S = NA \left(\frac{V}{N} \right)^{1/2} \left(\frac{U}{N} \right)^{3/4} = AN^{-1/4} V^{1/2} U^{3/4}.$$

Vamos, então, obter as equações de estado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3A}{4} (NU)^{-1/4} V^{1/2}; \\ \frac{p}{T} &= \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{A}{2} N^{-1/4} V^{-1/2} U^{3/4}; \\ \frac{\mu}{T} &= -\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{A}{4} N^{-5/4} V^{1/2} U^{3/4}. \end{aligned}$$

b) Nos processos adiabáticos quase-estáticos a entropia permanece constante. Vamos escrever a entropia como função de p e V . Dividindo a segunda equação de estado pela primeira, vem:

$$p = \frac{2}{3} \frac{U}{V},$$

logo:

$$U = \frac{3}{2}pV.$$

Substituindo a energia interna na expressão da entropia, obtemos:

$$S = AN^{-1/4}p^{3/4}V^{5/4}.$$

Como N permanece constante no processo adiabático, teremos, nesse caso:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial p}dp + \frac{\partial S}{\partial V}dV = 0,$$

o que leva a:

$$3p^{-1/4}V^{5/4}dp + 5p^{3/4}V^{1/4}dV = 0.$$

ou seja:

$$3\frac{dp}{p} = -5\frac{dV}{V}.$$

Integrando essa expressão entre os estados (V_1, p_1) e (V_2, p_2) , teremos:

$$3 \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = 5 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right),$$

o que leva a $p_1V_1^{5/3} = p_2V_2^{5/3}$.

c) Invertendo a equação fundamental na representação da entropia, obtemos:

$$U = \left(\frac{S}{A} \right)^{4/3} N^{1/3} V^{-2/3}.$$

A energia livre de Helmholtz é dada pela transformada de Legendre:

$$F(T, V, N) = U - TS = \left(\frac{S}{A} \right)^{4/3} N^{1/3} V^{-2/3} - TS.$$

Devemos eliminar S nessa expressão. Para isso, lembramos que:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{4}{3A^{4/3}} S^{1/3} N^{1/3} V^{-2/3},$$

o que pode ser invertido, resultando em:

$$S = \left(\frac{3}{4} \right)^3 A^{4/3} T N^{-1/3} V^{2/3}.$$

Substituindo a entropia na expressão da energia livre de Helmholtz, após alguma álgebra obtemos esse potencial nas suas variáveis naturais:

$$F(T, V, N) = -\frac{27}{256}(AT)^4 V^2 N^{-1}.$$